Mécanique – Chapitre 1 : Cinématique du point

Extrait du programme de Terminale

Notions	Capacités exigibles
Décrire un mouvement Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point Mouvement rectiligne uniformément accéléré	Définir le vecteur vitesse comme la dérivée du vecteur position par rapport au temps et le vecteur accélération comme la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps. Etablir le)s coordonnées cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération à partir des coordonnées du vecteur position et/ou du vecteur vitesse Caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : rectiligne, rectiligne uniforme, rectiligne uniformément accéléré. Réaliser et/ou exploiter une vidéo ou une chronophotographie pour déterminer les coordonnées du vecteur position en fonction du temps et en déduire les coordonnées approchées ou les représentations des vecteurs vitesse et accélération.

Extrait du programme de BCPST1

Notions	Capacités exigibles
Repérage dans l'espace et dans le temps Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement.	Choisir un référentiel adapté à la description du mouvement étudiée.
Cinématique du point Description du mouvement d'un système par celui d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Système des coordonnées cartésiennes.	Exprimer, à partir d'un schéma, le déplacement élémentaire et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes.
Mouvement rectiligne uniformément accéléré.	Caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : rectiligne, rectiligne uniforme, rectiligne uniformément accéléré.
Mouvement de vecteur accélération contant.	Établir l'expression de la vitesse et de la position en fonction du temps. Déterminer la vitesse en une position donnée. Obtenir l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.

Ce qu'il faut retenir de ce chapitre

Savoirs	Savoir-faire
Définition des coordonnées cartésiennes Définition de la base vectorielle cartésiennes Expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans la base cartésienne Définitions et conditions des différents types de mouvement : uniforme, rectiligne uniforme, uniformément accéléré, circulaire, circulaire uniforme.	Placer des points et représenter des vecteurs dans la base cartésienne Savoir projeter un vecteur dans la base cartésienne Savoir passer d'un système de coordonnées à un autre. Déterminer l'équation d'une trajectoire à partir d'une équation horaire du mouvement. Tracer une trajectoire à partir d'une équation horaire ou de l'équation de la trajectoire. Retrouver les équations horaires du mouvement à partir d'information sur l'accélération et/ou la vitesse

Extraits de rapports de jury du concours AGRO-VETO

- Écrire une vitesse sous la forme $v = d/t$ suppose qu'elle est constante.
- On attend aussi plus de rigueur dans les écritures mathématiques : distinction entre scalaire et vecteur. Attention à ne pas écrire d'égalité entre scalaires et vecteurs.

Cahier d'entraînement des prépas : exercices sélectionnés de la fiche 10

Introduction :

La cinématique du point matériel consiste en la description de la position et de la vitesse d'un point indépendamment de toute loi physique. C'est donc un cours de présentation et de manipulation d'outils mathématiques qui va suivre.

I. Référentiel et repères

1. Notion de référentiel et référentiels usuel

a. Définition

Référentiel :

On appelle référentiel $\mathfrak{R}$, lié à un objet de référence, l'ensemble des points que l'on considère fixes lors de l'étude du mouvement d'un système. Il est associé à un repère de temps et un repère d'espace.

Propriété : le mouvement d'un objet est donc relatif au référentiel d'étude

Exemple : une personne (notée 1) lâche une bille M dans un train en mouvement rectiligne uniforme. Une deuxième personne (notée 2) est immobile sur le quai.

b. Référentiels usuels

Lors de l'étude du mouvement d'un système il faudra choisir le référentiel le plus adapté. Nous décrirons les trois référentiels les plus utilisés.

Les référentiels usuels sont définis par un point fixe et un repère cartésien (défini par trois directions fixes elles aussi).

Référentiel héliocentrique : pour l'étude du mouvement des planètes autour du Soleil (pas vraiment au programme)

Les mouvements étudiés dans ce référentiel sont décrit par rapport au centre du Soleil considéré comme fixe. Le repère cartésien associé a pour point origine O, le centre du Soleil, et ses trois axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines considérées comme fixes.

Référentiel géocentrique : pour l'étude du mouvement des satellites autour de la Terre (pas vraiment au programme)

Les mouvements étudiés dans ce référentiel sont décrit par rapport au centre de la Terre considéré comme fixe. Le repère cartésien associé a pour point origine O, le centre de la Terre, et ses trois axes sont parallèles à ceux du référentiel héliocentrique.

Référentiel terrestre : pour l'étude du mouvement des objets à la surface de la Terre (le principal pour nous cette année)

Les mouvements étudiés dans ce référentiel sont décrit par rapport à la surface de la Terre considérée comme fixe. On choisira pour origine du repère cartésien un point fixe à la surface de la Terre (suivant sa rotation), les axes du repère doivent suivre la rotation de la Terre.

2. Repère de temps

Au référentiel, est associé un repère de temps permettant de connaître les dates des positions occupées par le point. On précise pour cela :

- un instant origine ($t = 0$),
- une unité de temps,
- une orientation dans le sens des temps croissants.

Lors de l'étude du mouvement d'un système il faudra choisir l'origine du repère de temps

Remarque : le temps est absolu en mécanique classique, c'est-à-dire qu'il a la même valeur pour deux observateurs liés à des référentiels différents. Ce n'est pas le cas en mécanique relativiste.

3. Repère d'espace : système de coordonnées cartésiennes

a. Définition

Définition :

Pour un référentiel donné, il existe une infinité de repères différents, il faut choisir le plus adapté à la situation étudiée.

b. Système de coordonnées cartésiennes

Il existe plusieurs systèmes de coordonnées pour repérer la position d'un point M dans l'espace. Pour repérer un point dans un espace à trois dimensions ils faut donner trois paramètres indépendant.

Par exemple pour se repérer à la surface de la Terre on donne la latitude, la longitude (deux angles) et l'altitude (une distance) : ce sont les coordonnées dites polaires.

Pour l'étude des mouvements à la surface de la Terre (cadre du programme) le système le plus fréquemment utilisé est le système de coordonnées cartésiennes.

4. Équations horaires et trajectoire d'un point

Lors de la résolution d'un problème de mécanique, on trouve souvent l'expression des coordonnées de position en fonction du temps.

$$\text{exemples en coordonnées cartésiennes 2D : } \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 6t + 5 \end{cases}$$

Ce type de système constitue **deux équations horaires** du mouvement : si on connait l'instant t, alors on connait les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du point M. Mathématiquement, on a une équation dite paramétrique d'une courbe, le paramètre étant ici t : la courbe en question représente la **trajectoire** du point.

Trajectoire d'un point M

Méthodologie : pour obtenir l'équation de la trajectoire d'un point à partir des équations horaires, il faut manipuler les équations ne manière à faire disparaître la variable t.

Sur l'exemple précédent :

On peut ainsi tracer la courbe qu'emprunte le point M dans l'espace mais l'information temporelle est perdue (on ne peut plus savoir à quel moment le point M se situe en tel ou tel endroit).

II. Repérage de vecteurs

L'outil mathématique le plus adapté à la description des mouvements est l'outil vectoriel.

1. Rappels mathématiques concernant les vecteurs

a. Définition

Définition

Un vecteur est un objet mathématique contenant plusieurs informations :

En trois ou deux dimensions il est représenté par une flèche.

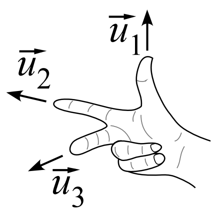
b. Décomposition dans une base – notion de coordonnées

Il est souvent utile d'utiliser une base vectorielle afin de décomposer les vecteurs en différentes coordonnées. En physique, on travaille toujours sur une base orthonormée directe.

On décrit un vecteur comme une combinaison linéaire de vecteurs $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$, appelée base. On utilisera des bases orthonormées telles que :

- $\|\overrightarrow{u_1}\| = \|\overrightarrow{u_2}\| = \|\overrightarrow{u_3}\| = 1$ (vecteurs unitaires)
- $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ sont perpendiculaires entre eux

Remarque : on parle de bases orthonormées directes si le sens de $\overrightarrow{u_3}$ respecte « la règle de la main droite »



Décomposons le vecteur $\overrightarrow{F}$ dans la base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$:

Coordonnées :

Norme du vecteur en fonction des coordonnées :

Ceci n'est valable que si la base utilisée est orthonormée.

c. Projection rapide d'un vecteur connaissant un angle entre ce vecteur et un vecteur de la base

La décomposition dans une base est un outil précieux, qu'il faut donc manipuler « les yeux fermés ». Un cas courant est de déterminer les coordonnées en fonction de la norme du vecteur et des cosinus et sinus de l'angle formé entre le vecteur et un des vecteurs de la base. Il faut alors retenir de manière absolue le schéma de la figure 1.

Figure 1 : Coordonnées en fonction d'un angle

2. Vecteur position

À partir du repérage de la position d'un point ou peut définir le vecteur position dans un repère d'étude.

Définition :

Nous allons définir le vecteur position dans la base cartésienne $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ associé à un référentiel $\mathcal{R}$ d'origine O.

Vecteur position :

Propriétés de la base :

Norme du vecteur position :

III. Dérivée vectorielle dans un référentiel $\mathcal{R}$

1. Définition

Rappel :

Pour une fonction $f(t)$, la dérivée de f par rapport au temps est :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{f(t+\mathrm{d}t) - f(t)}{\mathrm{d}t}$$

Définition de la dérivée d'un vecteur :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{\overrightarrow{A}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{A}(t)}{\mathrm{d}t}$$

Remarque très importante : la dérivée d'un vecteur est un vecteur.

2. Propriétés

Soient $\overrightarrow{A}(t)$, $\overrightarrow{B}(t)$ des vecteurs dépendant du temps, $f(t)$ une fonction scalaire du temps, α une constante.

Propriétés :

si $\overrightarrow{A}(t) = \overrightarrow{\mathrm{cst}}$ alors $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0}$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\alpha.\overrightarrow{A}(t)\right)}{\mathrm{d}t} = \alpha\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(f(t).\overrightarrow{A}(t)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}.\overrightarrow{A}(t) + f(t).\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{B}(t).\overrightarrow{A}(t)\right)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{A}.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{B}}{\mathrm{d}t} + \overrightarrow{B}.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}$$

Dérivée d'un vecteur de norme constante :

Démonstration :

$$\left\|\overrightarrow{A}\right\| = \mathrm{cste} \quad \Rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{A}\right\|^2 = \mathrm{cste}$$

$$\text{Or } \overrightarrow{A}.\overrightarrow{A} = \left\|\overrightarrow{A}\right\| \times \left\|\overrightarrow{A}\right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{A}\,;\,\overrightarrow{A}}\right) = \left\|\overrightarrow{A}\right\|^2$$

Donc : $\left\|\overrightarrow{A}\right\|^2 = \overrightarrow{A}.\overrightarrow{A} = \mathrm{cste}$

Dérivons :

$$\frac{\mathrm{d}\left\|\overrightarrow{A}\right\|^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{A}\right)}{\mathrm{d}t} = 2\overrightarrow{A}.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t} = 0$$

On a donc, soit :

- $\left\|\overrightarrow{A}\right\| = 0$ (contraire aux conditions de départ)
- $\left\|\mathrm{d}\overrightarrow{A}/\mathrm{d}t\right\| = 0$ (contraire aux conditions de départ car on retrouve $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\mathrm{cst}}$)
- $\mathrm{d}\overrightarrow{A}/\mathrm{d}t \perp \overrightarrow{A}$ CQFD

3. Dérivée d'un vecteur dans la base cartésienne

Dérivation dans la base cartésienne :

Démonstration

Autre écriture spécifique à la mécanique :

IV. Vecteur vitesse et vecteur accélération dans un référentiel $\mathcal{R}$

1. Vecteur déplacement élémentaire

Définition :

En notant O un point fixe du référentiel d'étude, on appelle vecteur déplacement élémentaire le vecteur $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ (différentielle du vecteur $\overrightarrow{OM}$).

2. Vecteur vitesse d'un point matériel dans un référentiel $\mathcal{R}$

a. Définition et propriété

Définition

Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}(t)$ du point M dands le référentiel $\mathcal{R}$ dont O est un point fixe est :

Propriété

b. Expression dans la base cartésienne

Vecteur position : $\overrightarrow{OM}(t) = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}$

Vecteur vitesse :

3. Vecteur accélération d'un point matériel dans un référentiel $\mathcal{R}$

a. Définition

Définition :

Le vecteur accélération $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}}(t)$ du point M dands le référentiel $\mathcal{R}$ dont O est un point fixe est :

b. Lien entre $\vec{a}$ et $\vec{v}$ selon le type de mouvement

mouvement accéléré :

mouvement décéléré :

mouvement uniforme :

Démonstration :

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v}.\vec{v} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{v}.\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|^2}{\mathrm{d}t} = 2\vec{v}.\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 2\vec{v}.\vec{a}$$

$\mathrm{d}\|\vec{v}\|^2/\mathrm{d}t$ est de même signe que $\vec{v}.\vec{a}$

Si $\|\vec{v}\| \nearrow$: $\vec{v}.\vec{a} > 0$

Si $\|\vec{v}\| \searrow$: $\vec{v}.\vec{a} < 0$

Si $\|\vec{v}\|$cst : $\vec{v}.\vec{a} = 0$

c. Expression dans la base cartésienne

V. Étude de mouvements rectilignes

1. Mouvement rectiligne uniforme

Définition :

On peut retrouver, par intégration successive par rapport au temps, l'expression du vecteur vitesse en fonction du temps, puis l'expression du vecteur position.

Repère choisi : cartésien à une dimension, vecteur de base $\overrightarrow{u_x}$ fixé par la direction de $\overrightarrow{v_0}$

On travaillera donc uniquement sur la projection sur $\overrightarrow{u_x}$ des vecteurs : $a_x(t)$, $v_x(t)$, $x(t)$

Conditions initiales :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM}(t=0) = x_0\,\overrightarrow{u_x} \\ \vec{v}(t=0) = v_0\,\overrightarrow{u_x} \end{cases}$$

Intégrations successives :

2. Mouvement rectiligne uniformément varié

Définition :

Repère choisi : cartésien à une dimension, vecteur de base $\overrightarrow{u_x}$ fixé par la direction de $\overrightarrow{v_0}$

Conditions initiales :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM}(t=0) = x_0\overrightarrow{u_x} \\ \vec{v}(t=0) = v_0\overrightarrow{u_x} \end{cases}$$

Intégrations successives :

L'étude des mouvements non rectiligne sera traitée en lien avec le chapitre 2.