Mécanique – Chapitre 2 : Dynamique du point

Extrait du programme de BCPST1

Notions	Capacités exigibles
Masse d'un système matériel. Conservation de la masse d'un système matériel fermé. Centre de masse (d'inertie) d'un système matériel.	Justifier qualitativement la position du centre de masse d'un système matériel, cette position étant donnée. Utiliser la relation entre la quantité de mouvement d'un système matériel et la vitesse de son centre de masse.
Première loi de Newton, principe d'inertie. Référentiel galiléen.	Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens. Discuter qualitativement du caractère galiléen d'un référentiel donné pour le mouvement étudié.
Modélisation d'une action mécanique par une force. Troisième loi de Newton.	Établir un bilan des actions mécaniques s'exerçant sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte en représentant les forces associées sur une figure.
Deuxième loi de Newton. Équilibre d'un système.	Utiliser la deuxième loi de Newton dans des situations variées.
Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète.	Établir et exploiter les équations horaires du mouvement. Établir l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
Modèle d'une force de frottement fluide linéaire en vitesse. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute. Vitesse limite.	Déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement. Exploiter une équation différentielle sans la résoudre analytiquement, par exemple : écriture sous forme adimensionnée, analyse en ordres de grandeur, existence d'une vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par résolution numérique, etc.

Modèle du frottement de glissement : lois de Coulomb.	Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider
Modèle linéaire de l'élasticité d'un matériau.	Caractériser une déformation élastique linéaire par sa réversibilité et son amplitude proportionnelle à la force appliquée. Extraire une constante de raideur et une longueur à vide à partir de mesures expérimentales ou de données. Analyser la limite d'une modélisation linéaire à partir de documents expérimentaux.
Exemple d'oscillateur harmonique : système masse-ressort en régime libre. Pulsation et période propres.	Déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement. Déterminer les expressions de la pulsation et de la période propres du mouvement.

Ce qu'il faut retenir de ce chapitre

Savoirs	Savoir-faire
Notion de centre d'inertie. 1ère loi de Newton : principe d'inertie et définition d'un référentiel galiléen (connaître les trois référentiels galiléens et pseudo-galiléen et leurs limites d'utilisation). 3ème loi de Newton : principe des actions réciproques. 2ème loi de Newton : principe fondamental de la dynamique $\sum \overrightarrow{F} = \mathrm{d}\overrightarrow{p}/\mathrm{d}t$, cas où la masse est une constante $\sum \overrightarrow{F} = m\,\mathrm{d}\overrightarrow{a}/\mathrm{d}t$ Expressions de différentes forces usuelles (les autres devront être données) : Force d'interaction gravitationnelle, poids, force de rappel d'un ressort, tension d'un fil, force de frottement fluide, force pressante sur une surface plane Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Modèle d'une force de frottement fluide linéaire en vitesse. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute. Vitesse limite. Force de frottement solide : lois de Coulomb Modèle linéaire de l'élasticité d'un matériau. Exemple d'oscillateur harmonique : système masse-ressort en régime libre. Pulsation et période propres.	Savoir faire un bilan des forces. Savoir projeter le bilan des forces sur le repère choisi. Savoir utiliser la condition d'équilibre mécanique pour déterminer une inconnue. Savoir intégrer la deuxième loi de Newton pour trouver les équations horaires d'un mouvement. Déterminer et résoudre (ou analyser si l'équation est complexe) l'équation différentielle d'un mouvement avec frottement. Caractériser une déformation élastique linéaire par sa réversibilité et son amplitude proportionnelle à la force appliquée. Savoir résoudre une équation différentielle harmonique (Déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement. Déterminer les expressions de la pulsation et de la période propres du mouvement.)

Extraits de rapports de jury du concours AGRO-VETO

- En mécanique, le choix d'un repère et de son orientation est indispensable.
- Le système étudié doit être clairement défini. Celui-ci est souvent très simple en mécanique, mais une question à ce sujet conduit parfois à des réponses surprenantes : le ressort lui-même au lieu de la masse accrochée à son extrémité.
- Les relations mélangeant des grandeurs scalaires et vectorielles ont été fréquentes. Tout développement mathématique devient alors impossible. On ne peut que conseiller aux candidats d'écrire le principe fondamental de la dynamique sous forme vectorielle, puis de le projeter sur les différents axes d'un repère judicieusement choisi. Cette procédure simple devrait permettre d'éviter des relations telles que $v = gt + v_0$ (avec $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{v_0}$ non colinéaire….). Lorsque l'examinateur s'inquiète alors de la signification accordée à v, il apprend qu'il s'agit du module du vecteur vitesse !!
- La distinction entre un vecteur force, sa norme et sa composante sur un axe n'est pas toujours claire. Ainsi les projections de forces ont parfois été sources de difficultés. Déterminer les composantes du poids dans le repère associé à un plan incliné a pu relever du défi.
- Les intégrations doivent également être menées avec rigueur. Le jury conseille là aussi aux futurs admissibles de prendre le temps de poser soigneusement leur calcul, avec des règles simples : identification de la variable d'intégration, caractère variable ou constant des autres grandeurs, choix de bornes d'intégration cohérentes dans les deux membres. Trop de précipitation en ce domaine peut en effet conduire à intégrer $v_x = v_0 \cos\alpha$ en, $x(t) = v_0 \sin\alpha$ alors que la variable d'intégration est x et que α est une constante.
- La balistique a été source de nombreuses erreurs, la plus grosse : la vitesse initiale participant au bilan des forces. Se munir d'un repère cartésien avec deux axes, horizontal et vertical, dont l'origine est la position initiale doit paraître naturel, ainsi que la projection de la deuxième loi de Newton sur ces axes.

Cahier d'entraînement des prépas : exercices sélectionnés de la fiche 11

Liens internet intéressants :

Modélisation d'un tir parabolique :

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/R.F.D/Tir_parabolique_FJ.php

Modélisations d'une chute avec ou sans frottement :

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/R.F.D/Chute_FJ.php

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/R.F.D/chute1.php

Pendule élastique vertical : avec un facteur d'amortissement nul on est dans le cas du cours de 1$^{\text{ère}}$ année, avec un facteur d'amortissement non nul (h ou λ selon les simulations) on est dans le cas du cours de 2$^{\text{ème}}$ année :

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/ressort.php

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/Oscillat3_FJ.php

Pendule élastique horizontal et évolution à chaque instant de nombreuses grandeurs pour comprendre le phénomène (mettre un facteur d'amortissement h nul pour obtenir le cas du cours) :

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php

Pour aller plus loin :

Modélisation du mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique :

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Charges/q_dans_E1.php

Expérience de Millikan ayant permis de mesurer la charge élémentaire, utilisant l'interaction des charges avec un champ électrique :

https://www.youtube.com/watch?v=XMfYHag7Liw

I. Modèle du point matériel et centre de masse/d'inertie

La dynamique correspond à l'étude du mouvement d'un corps en relation avec ses causes : les forces extérieures appliquées sur ce corps. On se limitera à l'étude du mouvement d'un point matériel ou d'un solide assimilable à un point matériel.

1. Modèle du point matériel

Modèle du point matériel :

Un point matériel M est un point de l'espace physique auquel on associe une masse m. Cette masse m caractérise la quantité de matière que "contient" le point matériel.

Remarque : le point matériel est un modèle car au sens mathématique, le volume d'un point est nul et pourtant on lui associe une quantité de matière.

2. Système matériel et centre de masse / d'inertie

a. Système matériel

Système matériel :

Un **système matériel** $\boldsymbol{m}$ est **ensemble** de points matériels $\boldsymbol{M_i}$. La masse du système est la **somme des masses** des points matériels $\boldsymbol{m_i}$ qui le constituent :

La **masse** d'un **système matériel fermé** ne varie pas au cours du temps : elle **se conserve**. (cadre du programme)

Un **solide** est un système matériel **indéformable**, si les distances entre les points qui le constituent, ne varient pas au cours du temps. Dans le cas contraire, le système est dit **déformable**.

b. Centre de masse ou d'inertie

Définition :

Aucun calcul de barycentre n'est au programme, il faut juste être capable de justifier sa position par analyse de la géométrie d'un système matériel. On retiendra :

Propriété :

Le centre de masse ou d'inertie I d'un solide de composition homogène est situé, dans les cas où les éléments suivant de symétrie existent :

Par exemple : le centre de masse ou d'inertie d'une boule homogène est situé en son centre.

3. Assimilation d'un système à son centre de masse / d'inertie

Propriété du centre de masse/d'inertie

Modèle d'étude :

Exemple 1 : voici un exemple pour lequel l'étude du mouvement d'un solide peut se réduire à l'étude du mouvement de son centre d'inertie.

Considérons un ballon en vol. Si l'influence des l'air est négligée, le mouvement de son centre C est indépendant de son orientation. Nous pouvons assimiler le ballon à un son centre d'inertie pour étudier sa trajectoire globale.

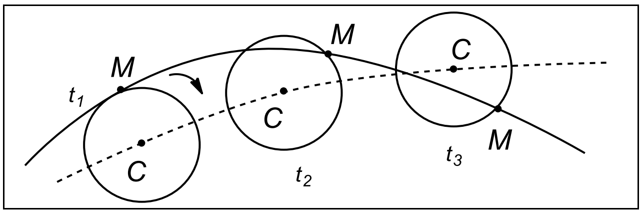


Figure 1 : trajectoire d'un ballon en l'air

En revanche si les frottements de l'air ne sont pas négligeables, la rotation du ballon dans l'air va avoir une influence sur le mouvement d'ensemble du ballon. Nous ne pouvons donc pas réduire dans ce cas l'étude mécanique du ballon à celle son centre.

Cette modélisation, qui permet d'étudier la trajectoire du centre du ballon, ne permet pas de connaître le mouvement de chacun de ses points. En effet si le ballon est en rotation, la vitesse d'un point M de l'enveloppe du ballon sera différente de celle du point C. L'étude du solide dans son ensemble fait appel à un autre domaine de la mécanique : la mécanique du solide.

Exemple 2 : voici un exemple pour lequel l'étude du mouvement d'un solide ne pourra pas se réduire à celui de son centre d'inertie, car l'orientation de l'ensemble du solide influence le mouvement du centre d'inertie.

Le ballon précédent roule sur un plan incliné. La nature du contact en I entre le plan incliné et le ballon aura une influence essentielle sur son mouvement.

En effet la vitesse du centre d'inertie d'un ballon qui roule ne sera pas identique à celle d'un objet en translation qui glisserait sans rouler sur le plan incliné. On ne pourra donc pas ne pas tenir compte de la rotation du ballon. La mécanique du point matériel n'est donc pas adaptée à une telle étude, cette dernière relève du domaine de la mécanique des solides, hors programme en BCPST.

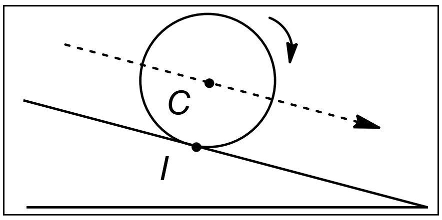


Figure 2 : ballon en rotation sur un plan incliné

II. Forces

1. Modélisation des actions mécaniques par des vecteurs forces

Action mécanique et vecteur force :

Une action mécanique est une action capable de provoquer ou de modifier le mouvement d'un corps. On la modélise par un vecteur force.

Un vecteur force possède trois caractéristiques mathématiques, plus une quatrième d'origine physique :

- sa direction (la droite qui le porte),
- son sens (donnée par une orientation de la droite qui le porte),
- sa valeur, aussi appelée norme en mathématiques, elle s'exprime en Newton dans le système international,
- son point d'application (point du système qui subit l'action extérieure).

Deux vecteurs dont les trois premières caractéristiques sont identiques sont égaux. Deux vecteurs égaux peuvent avoir des points d'application différents.

On peut classer ces interactions en deux catégories :

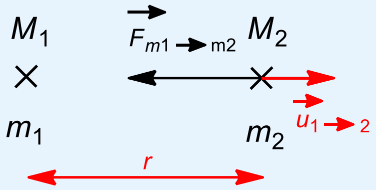
Les interactions à distance : il existe différentes types d'interactions à distance : interactions gravitationnelles entre masses, interaction électromagnétiques entre charges, interactions nucléaires entre protons et neutrons d'un noyau atomique (interaction faible et interaction forte). Seule l'interaction gravitationnelle à proximité d'un astre, le poids, est à connaître. Nous détaillerons plus loin d'où vient son expression.

Les interactions de contact : ce sont des interactions à l'échelle macroscopique qui modélise la somme des interactions fondamentales qui s'exercent sur chaque atome de matières à l'échelle microscopique. On distingue de très nombreuses forces de contact, quelques exemples seront détaillés plus loin.

2. Interactions à distance : cas de l'interaction gravitationnelle à proximité d'un astre, le poids

a. Interaction fondamentale gravitationnelle de Newton (formule hors programme)

Une masse ponctuelle m_1, située au point M_1, attire une masse ponctuelle m_2, située au point M_2 selon une force gravitationnelle dite Newtonienne :



$$\vec{F}_{m_1\rightarrow m_2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_{1\rightarrow 2}$$

Toujours attractive

Remarques :

- La force qu'exerce m_2 sur m_1 respecte le principe des actions réciproques : $\vec{F}_{m_2\rightarrow m_1} = -\vec{F}_{m_1\rightarrow m_2}$.
- Les astres à symétrie sphérique de masse se comportent vu de l'extérieur comme une masse ponctuelle située en son centre.
  Exemple : force de gravitation du Soleil sur la Terre, en les assimilant à des masses ponctuelles :

$$\vec{F}_{S\rightarrow T} = -G\frac{m_S m_T}{r^2}\vec{u}_{S\rightarrow T}$$

avec r la distance du centre du Soleil au centre de la Terre ($\approx 1{,}5.10^{11}$ m)

b. Interaction avec un champ de pesanteur : poids

Définition : poids

Le poids est une force qui s'exerce sur tout point matériel (masse m) au voisinage d'un astre. Il est noté :

Remarques :

Pour nous, l'astre étant la Terre, cette force est due :

- à la force d'attraction gravitationnelle de la Terre, on négligera donc les autres forces à notre niveau (pour des études plus précises il faut tenir compte de l'attraction des autres astres, en particulier celle de la Lune, on ajoute dans ce cas un terme appelé terme de marée).
- A la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre sur elle-même : force que l'on négligera à notre niveau (effet Coriolis qui permet de justifier le sens de rotation des vents sur Terre).

Ainsi le poids d'un objet ponctuel en M de masse m, située à l'altitude z du sol terrestre, s'identifie à la force gravitationnelle exercée par la Terre (centre C, rayon R_T, masse m_T) sur ce point :

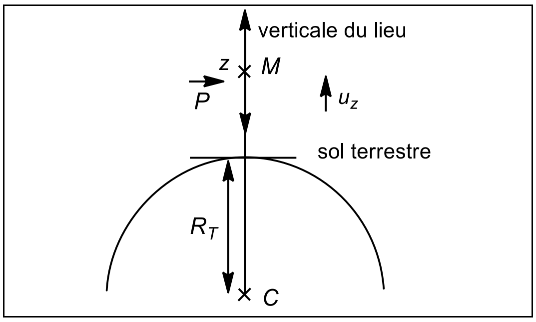


Figure 3 : interaction entre un point matériel et le champ de pesanteur terrestre

Par identification :

Pour des points matériels au voisinage du sol : $z \ll R_T \approx 6400$ km. On prendra donc :

Le champ de pesanteur sera donc généralement supposé uniforme.

Notion de champ (pour information)

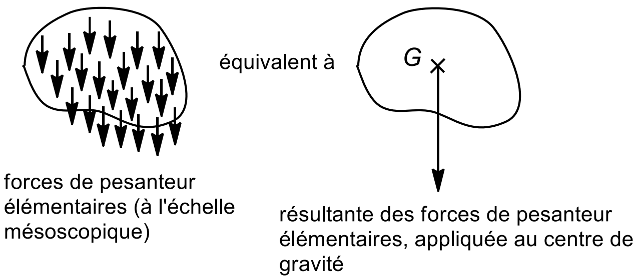
Un **champ** est associé à une propriété physique qui se manifeste en tout point d'un espace. Cette propriété est définie par une grandeur mesurable qui dépend de la position du point.

On parle de **champ vectoriel** lorsque la grandeur physique mesurable le caractérisant a les propriétés d'un vecteur.

Dans une région de l'espace, un champ est **uniforme** si la grandeur physique le définissant a les mêmes caractéristiques en tout point.

Si le système subissant le champ de pesanteur terrestre n'est pas ponctuel, on pourra l'assimiler à un objet ponctuel en concentrant toute sa masse en un point appelé **centre de gravité, noté *G*** de l'objet.

Le **centre de gravité** est le point d'application de la résultante des forces de pesanteur (somme des forces de pesanteur appliqué en chaque point du solide).



Si le champ de pesanteur est uniforme sur l'ensemble du système, alors le centre de gravité est confondu avec le **centre de masse / d'inertie**.

3. Interactions de contact : tension d'un fil

Considérons un point matériel M de masse m accroché à l'extrémité d'un fil souple, de masse négligeable et inextensible. Ce fil « retient » alors le point M, cette action mécanique est modélisée par une force appelée tension du fil, notée $\overrightarrow{T}$.

Pour un fil idéal la norme de la tension du fil est la même en tout point du fil.

4. Interactions de contact : forces de frottement fluide

Présentation :

Lorsqu'un solide **se déplace** dans un fluide (liquide, gaz), les molécules de fluide **s'opposent** au déplacement du solide suite **aux chocs** des particules de fluide sur la surface du solide. On modélise l'ensemble de ces interactions par une force appelée force de frottement fluide.

Dans le cas général, les forces de frottement du fluide dépendent :

Cette force est la même que le corps se déplace dans le fluide ou que le fluide s'écoule autour du corps.

Dans le cas d'une translation du solide à faible vitesse (modèle laminaire), la loi de force est linéaire :

Caractéristiques de la force de frottement fluide :

5. Interactions de contact : réaction d'un support – Loi de Coulomb

On considère un contact entre un solide (S) et un support (S_0). On admet que les forces réparties sur toute la surface de contact peuvent être modélisées par une force unique appelée réaction du support et notée $\overrightarrow{R}$, s'appliquant en un point I de la surface de contact. Si (S) est immobile ou animé d'un mouvement de translation, la droite d'action de $\overrightarrow{R}$ passe par le centre de masse / d'inertie. On présente une situation avec un plan incliné pour bien comprendre les directions mises en jeu, mais les conclusions sont identiques avec un support horizontal.

En l'absence de frottement :	**En présence de frottement :**

L'intensité de la force de frottement dépend de l'intensité de la réaction normale du support et de la situation dans laquelle se trouve le solide (en équilibre ou en mouvement de glissement), les lois de Coulomb en sont une bonne modélisation.

Modèle du frottement de glissement : lois de Coulomb

Considérons un solide soumis à la réaction $\overrightarrow{R}$ d'un support avec $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_\mathrm{N}} + \overrightarrow{R_\mathrm{T}}$.

Remarque : les valeurs des coefficients de frottement statique et dynamique dépendent de la nature des surfaces en contact et $\mu_\mathrm{s} > \mu$.

6. Comportement élastique et plastique d'un matériau – Modèle du ressort – Force de rappel

a. Définition et technique d'étude

La propagation des ondes sismiques, dont nous avons parlé précédemment dans l'année, entraîne une déformation de la matière et cette propagation ne peut se faire que si les roches possèdent une certaine élasticité. Propriétés élastique que l'on peut modéliser de manière analogique par un ressort.

Définition :

Courbe de traction :

Un **essai de traction** est une expérience de physique qui permet d'obtenir des informations sur le comportement élastique, le comportement plastique et le degré de résistance à la rupture d'un matériau, lorsqu'il est soumis à une sollicitation uniaxiale.

On effectue une traction continue du matériau : on augmente progressivement la longueur du matériau et on mesure la force qu'il faut appliquer pour obtenir cette longueur.

La courbe de traction représente la norme de la force $\overrightarrow{F}$ de traction appliquée en fonction de l'allongement $\ell - \ell_0$ du matériau.

Remarque : on représente plus souvent la contrainte ($\|\overrightarrow{F}\|/A_0$ avec A_0 aire de la section droite du matériau) en fonction de l'allongement relatif ($(\ell - \ell_0)/\ell_0$)

b. Comportement élastique et plastique d'un ressort

Un ressort à spires est un corps élastique, capable de se comprimer ou de s'allonger suivant la direction de son axe lorsqu'il est soumis à une force $\overrightarrow{F}$. Le ressort est un modèle simple permettant la compréhension du comportement élastique de nombreux matériaux

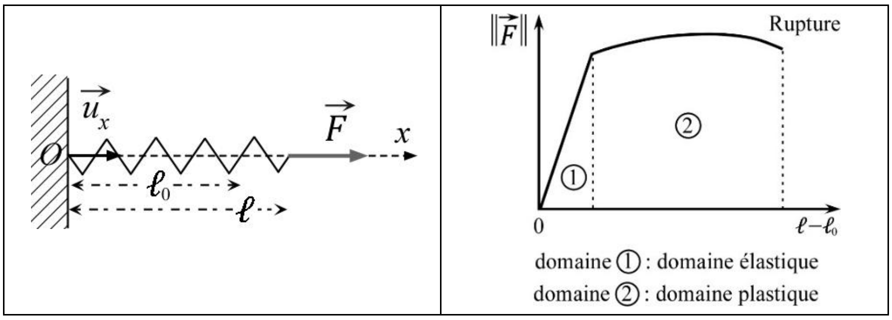


Figure 4 : Ressort et courbe de traction

Analyse :

On distingue deux domaines :

Remarque : la constante de raideur d'un ressort dépend de la nature du matériau utilisé et de paramètres géométriques comme la taille des spires, le diamètre du matériau etc.

c. Application aux roches

Les roches peuvent subir une déformation élastique sous l'influence d'une force de traction. L'étude montre tout comme pour le ressort, un premier domaine d'élasticité où la roche peut reprendre, après arrêt de la force, son état initial et un domaine de plasticité où on observe des déformations irréversibles. Au-delà d'une valeur maximale de la norme de la force appliquée, il y a rupture.

d. Force de rappel d'un ressort

Le ressort à spires s'allonge sous l'effet d'une force de traction $\overrightarrow{F}$. Il est capable ensuite de reprendre sa forme initiale grâce à une force de rappel qu'il exerce à son extrémité.

Soit un ressort idéal (de masse négligeable) de constante de raideur k ($\mathrm{N.m^{-1}}$). Dans son domaine élastique, le ressort exerce sur son extrémité M la force de rappel élastique $\overrightarrow{F}_{R\rightarrow M}$.

Remarque : l'expression de la force de rappel respecte le principe des actions réciproques (troisième loi de Newton).

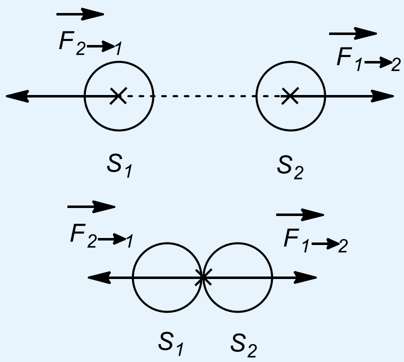
III. Lois de Newton

1. Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

Énoncé de la troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

Soient deux corps S_1 et S_2 en interaction. On note $\overrightarrow{F_{1\to2}}$ la force exercée par S_1 sur S_2 et $\overrightarrow{F_{2\to1}}$ la force exercée par S_2 sur S_1. Alors :

- $\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$
- $\vec{F}_{1\to2}$ et $\vec{F}_{2\to1}$ sont portés par la même droite d'action
- $\vec{F}_{1\to2}$ et $\vec{F}_{2\to1}$ ont le même point d'application s'il s'agit de forces de contact



2. Première loi de Newton : principe d'inertie et référentiels galiléens

a. Système isolé, système pseudo-isolé

Définitions :

b. Principe d'inertie

Énoncé :

pour un solide non ponctuel ce principe n'est valable que si on l'applique au centre d'inertie.

c. Référentiels galiléens

Propriété :

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

Les trois référentiels définis dans le chapitre précédent sont galiléens ou pseudo galiléen :

Référentiel héliocentrique (ou référentiel de Kepler) $\mathcal{R}_0$: c'est le référentiel galiléen de référence.

Référentiel géocentrique $\mathcal{R}_{\text{géo}}$: en translation elliptique par rapport à $\mathcal{R}_0$, il n'est donc pas galiléen.

Lorsque l'échelle de temps des mouvements étudiés sera beaucoup plus faible que la période de révolution de la Terre autour du Soleil (≈ 365 jours), alors on fera l'approximation d'un référentiel galiléen

Référentiel terrestre $\mathcal{R}_{\text{ter}}$: en rotation par rapport à $\mathcal{R}_{\text{géo}}$, il n'est donc pas galiléen.

Lorsque l'échelle de temps des mouvements étudiés sera beaucoup plus faible que la période de rotation de la Terre autour d'elle-même (24 h), alors on fera l'approximation d'un référentiel galiléen.

3. Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

a. Quantité de mouvement d'un système

Définition : vecteur quantité de mouvement

Le vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un point matériel de masse m animé de la vitesse $\vec{v}$ est :

b. Énoncé de la deuxième loi de Newton

Énoncé :

Pour un point matériel M de masse m, qui subit n forces extérieures $\overrightarrow{F_{\text{ext},i}}$ alors si le référentiel d'étude est galiléen :

Si la masse du système est constante alors :

c. Analyse mathématique de l'équation

- Le principe fondamental de la dynamique est une équation différentielle du second ordre :

$\sum \vec{F}_{\text{ext},i}$ est une fonction vectorielle du vecteur position : $\sum \vec{F}_{\text{ext},i} = f\left(\overrightarrow{OM}\right)$

$\vec{a}$ est la dérivée seconde du vecteur position : $\vec{a} = \mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}/\mathrm{d}t$

- Le principe fondamental de la dynamique est une équation vectorielle qui est donc équivalente à autant d'équations scalaires que de dimensions d'espace dans le système d'étude. On peut donc remonter à autant d'inconnues que d'équations.

Ces équations permettent de déterminer la trajectoire du mouvement si on connait à chaque instant la somme des forces qui s'exercent sur le système. Mais parfois un élément de la trajectoire est déjà connu, tandis qu'une des forces est inconnue.

IV. Quelques études de mouvements usuels d'un système

1. Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur uniforme en chute libre

Définition : chute libre

Système : le projectile de masse m assimilé à son centre de masse

Référentiel : terrestre supposé galiléen pour ce mouvement (durée du mouvement $\ll 24$ h)

Repère : on choisira toujours un repère cartésien avec $\overrightarrow{u_z}$ vertical (vers le haut en général mais ce n'est pas une obligation), $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ tels que le vecteur vitesse initiale s'exprime uniquement en fonction de $\overrightarrow{u_z}$ et d'un des deux autres vecteurs de la base.

Bilan des forces :

Principe fondamental de la dynamique :

Projection : avec un vecteur de base $\overrightarrow{u_z}$ orienté vers le haut

Il faut ensuite intégrer les trois équations pour déterminer les équations horaires, ce sont les conditions initiales qui différeront d'une situation à une autre.

IMPORTANT :

- Les paramètres de la chute et en particulier le temps de chute sont indépendants de la masse du système.
- Compte tenu du choix des axes du repère cartésien, v_{x,t_0} ou v_{y,t_0} sera égal à zéro, ainsi $x(t)$ ou $y(t)$ sera constant : et le mouvement s'effectue dans le plan xOz ou yOz.
- Il faudra prendre le temps de déterminer les coordonnées du vecteur vitesse initiale v_{x,t_0}, v_{y,t_0}, v_{z,t_0}, à l'aide des informations données sur la situation initiale. Une projection de vecteur sera sûrement nécessaire.

Voir exercices 3 et 4 de la feuille d'exercices pour s'entraîner sur les chutes libres verticale et parabolique.

2. Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur uniforme avec frottements dans le modèle linéaire

Système : le projectile de masse m assimilé à son centre de masse

Référentiel : terrestre supposé galiléen pour ce mouvement (durée du mouvement $\ll 24$ h)

Repère : on choisira toujours un repère cartésien avec $\overrightarrow{u_z}$ vertical (vers le haut en général mais ce n'est pas une obligation), $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ tels que le vecteur vitesse initiale s'exprime uniquement en fonction de $\overrightarrow{u_z}$ et d'un des deux autres vecteurs de la base.

Bilan des forces :

Principe fondamental de la dynamique :

Projection : avec un vecteur de base $\overrightarrow{u_z}$ orienté vers le haut

ATTENTION :

Suite avec l'exercice 5 de la feuille

3. Solide en contact avec un support : équilibre, mise en mouvement, freinage

Voir exercice 6

4. Mouvement d'oscillations d'un ressort : oscillateur harmonique sur l'exemple d'un ressort vertical

a. Présentation du système d'étude

Un objet ponctuel de masse m, lié à un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, est lâché sans vitesse initiale, le ressort étant étiré initialement : longueur $\ell_{t_0} > \ell_{\text{eq}}$ (ℓ_{eq} longueur à l'équilibre).

Schéma :

Système d'étude : objet de masse m

Référentiel : terrestre supposée galiléen pour ce mouvement

Repère choisi :

Bilan des forces :

b. Détermination de la loi horaire du mouvement

Principe fondamental de la dynamique :

Equation scalaire (projection sur l'axe Oz) :

Résolution :

1. solution particulière $z_{SP} = \text{cste}$

2. solution de l'équation homogène :

3. solution générale, principe de superposition :

4. détermination des constantes d'intégration à l'aide des conditions initiales :

c. Remarques

- **Détermination de la position d'équilibre de la masse**

- **Représentation de $\boldsymbol{z = f(t)}$**

- **Autre façon d'écrire l'équation différentielle**

L'équation différentielle à résoudre est :

$$\ddot{z} + \frac{kz}{m} = \frac{k}{m}\ell_0 + g \Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{kz}{m} - \frac{k}{m}\ell_0 - g = 0$$

Faisons apparaître la longueur à l'équilibre en mettant en facteur k/m :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}\left(z - \left(\ell_0 + \frac{m}{k}g\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}\left(z - \ell_{\text{éq}}\right) = 0$$

Effectuons le changement de variable suivant : $Z = z - \ell_{\text{éq}}$, $\ddot{Z} = \ddot{z}$, l'équation devient une équation harmonique sans second membre vérifiée par z :

$$\ddot{Z} + \frac{k}{m}z = 0$$

La résolution donne : $Z(t) = Z(t_0)\cos\,(\omega_0 t)$

Soit : $z(t) - \ell_{\text{éq}} = \left(\ell_{t_0} - \ell_{\text{eq}}\right)\cos\,(\omega_0 t)$